

# Zur Kraftübertragung zwischen Kunststoffrad und Stahllaufbahn\*

## Teil 1: Theoretische Behandlung kontaktmechanischer Probleme\*\*

D. Severin und W. Hammele, Berlin

**Inhalt.** Der erste Teil des Beitrags stellt bekannte Theorien vor, die sich mit der analytischen Bestimmung der Normal- und Tangentialspannungsverteilung in der Kontaktfläche zwischen Rad und Fahrbahn sowie mit dem bei rollendem Kontakt stets auftretenden Schlupf befassen. Der zweite Teil berichtet über Kraftschluß-Schlupf-Messungen an Kunststoffrädern auf einem Prüfstand, wobei ein zylindrisches Stahlgegenrad als Fahrbahn dient. Dabei werden die Einflußparameter Radwerkstoff, Raddurchmesser, Radballigenradius, Normalkraft und Rollgeschwindigkeit variiert. Aus dem Vergleich von Messung und Rechnung ergeben sich Hinweise auf notwendige Weiterentwicklungen der bestehenden Theorien.

**Anwendungen.** Die Wirkflächenpaarung Kunststoff-Stahl gewinnt wegen der speziellen Eigenschaften der Kunststoffe hinsichtlich Verschleiß, Korrosion, Gewicht, Geräuschenstehung, Fertigungskosten oder Dämpfung eine immer größere Bedeutung im Maschinenbau. Zur beanspruchungsgerechten Auslegung (Form, Werkstoff) muß aber der Beanspruchungszustand an der Kontaktstelle und auch integral über das Bauteil berechenbar sein, wozu der Beitrag wesentliche Grundlagen behandelt. Die Autoren sprechen gleichermaßen die Konstruktionspraxis und die Forschung an, da weitere Untersuchungen notwendig erscheinen.

### 1 Einleitung

Räder aus Kunststoffen können bei kleinen und mittelgroßen Radlasten auf vielen Gebieten erfolgreich arbeiten. Sie zeichnen sich durch geräuscharmen Lauf, kleines Eigengewicht, Korrosionsbeständigkeit, große Abriebfestigkeit, Schonung der Fahrbahn und die Möglichkeit der wirtschaftlichen Fertigung aus. Bei angetriebenen Rädern kann ihr relativ großer Kraftschlußbeiwert von Vorteil sein.

Das komplexe Eigenschaftsbild der Polymerwerkstoffe erschwert die Dimensionierung von Kunststoffrädern in der Praxis. Während bei metallischen Rädern die Materialdämpfung keine Bedeutung hat, ist sie bei schnelllaufenden Kunststoffrädern neben dem Elastizitätsmodul der entscheidende Materialkennwert für die zulässige Belastung. Sie bestimmt neben der Rollgeschwindigkeit und Radlast den Temperaturzustand im Inneren des Rades, ist dabei aber selbst eine Größe, die von der Temperatur abhängt.

Für eine betriebssichere Auslegung von Kunststoffrädern müssen ferner Erkenntnisse vorliegen über die Verformungen, die erforderlichen Anfahrkräfte nach längerem Stillstand, die Rollwiderstandskraft sowie über das Verschleißverhalten und

die Dauerfestigkeit. Bei tangentialkraftübertragenden Rädern ist die Kraftschluß-Schlupf-Kennlinie von Bedeutung.

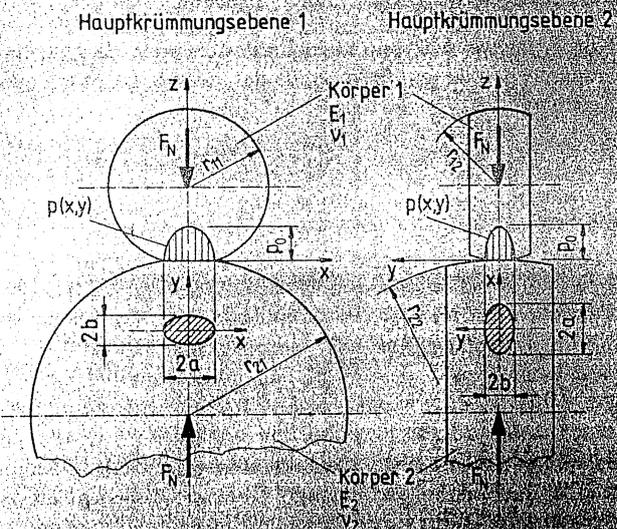
Am Institut für Fördertechnik und Getriebetechnik der Technischen Universität Berlin werden bereits seit mehreren Jahren Grundlagenuntersuchungen an Kunststoffrädern durchgeführt [1, 2]. Der vorliegende Beitrag berichtet über theoretische und experimentelle Untersuchungen zum Kraftschluß-Schlupf-Verhalten von Kunststoffrädern auf Stahllaufbahn.

### 2 Bekannte analytische Arbeiten zum Normalkontakt

#### 2.1 Theorie von Hertz

Die Theorie von Hertz [3, 4] — aufgestellt im Jahre 1881 — bestimmt die Normalspannung und die Verformung in der Berührungsfäche zweier Körper mit den Hauptkrümmungsradien  $r_{11}, r_{12}$  und  $r_{21}, r_{22}$ , die mit der Normalkraft  $F_N$  gegeneinander gepreßt werden (Bild 1). Der erste Index bezeichnet den Körper, der zweite die Hauptkrümmungsebene.

Die Hertz'sche Theorie gilt für homogene, isotrope Werkstoffe, die sich in dem betrachteten Belastungsbereich elastisch verhalten. Die Kontaktfläche muß im Vergleich zu den Körperoberflächen klein sein, damit die beiden Körper bezüglich



**Bild 1:** Geometrische Beziehungen, Kontaktflächenform und Normalspannungsverteilung bei der Berührung zweier allseitig gekrümmter Körper nach Hertz

\* Der Beitrag basiert auf den Ergebnissen eines Forschungsvorhabens, das mit finanzieller Unterstützung der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) durchgeführt wurde.

\*\* Teil 2 erscheint in Konstruktion 41 (1989) H. 5

lich des Spannungs- und Verformungszustands als sogenannte Halbräume betrachtet werden können. In der Kontaktfläche dürfen nur Normalspannungen und keine Schubspannungen wirken, d. h., die Reibungszahl  $\mu$  muß Null sein.

Nach Hertz bildet sich eine ellipsenförmige Kontaktfläche mit der kleinen Halbachse  $s$  und der großen Halbachse  $l$  aus.

$$s = s^* \sqrt[3]{3F_N r_e \frac{1 - \nu^2}{E}} \quad (1)$$

$$l = l^* \sqrt[3]{3F_N r_e \frac{1 - \nu^2}{E}} \quad (2)$$

Der Ersatzradius  $r_e$  errechnet sich aus den Hauptkrümmungsradien im Kontaktpunkt zu

$$\frac{1}{r_e} = \frac{1}{r_{11}} + \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{21}} + \frac{1}{r_{22}} \quad (3)$$

Ein Krümmungsradius ist positiv, wenn der Kreismittelpunkt innerhalb, und negativ, wenn er außerhalb des jeweils betrachteten Halbraums liegt. Die Hertzschen Beiwerte  $s^*$  und  $l^*$  [5] sind in Abhängigkeit des Hilfswertes  $\cos \tau$  tabelliert (Tabelle 1). Wenn die Hauptkrümmungsradien der beiden

Tabelle 1. Hertzsche Beiwerte  $s^*$  und  $l^*$  als Funktion des Hilfswertes  $\cos \tau$  sowie vollständige elliptische Integrale  $B^*$ ,  $C^*$  und  $D^*$  als Funktion der Exzentrizität  $e$

$\cos \tau$	$s^*$	$l^*$	$g$	$e^2$	$B^*$	$C^*$	$D^*$
1	0	$\infty$	0	1	1	$\infty$	$\infty$
0,9467	0,4014	4,0141	0,1	0,99	0,9889	1,7351	2,7067
0,8441	0,5114	2,5570	0,2	0,96	0,9686	1,1239	2,0475
0,7238	0,5938	1,9795	0,3	0,91	0,9451	0,8107	1,6827
0,5999	0,6642	1,6605	0,4	0,84	0,9205	0,6171	1,4388
0,4796	0,7278	1,4556	0,5	0,75	0,8959	0,4863	1,2606
0,3662	0,7870	1,3117	0,6	0,64	0,8719	0,3929	1,1234
0,2617	0,8433	1,2047	0,7	0,51	0,8488	0,3235	1,0138
0,1658	0,8972	1,1215	0,8	0,36	0,8267	0,2706	0,9241
0,0790	0,9493	1,0548	0,9	0,19	0,8055	0,2293	0,8491
0	1	1	1	0	0,7854	0,1964	0,7854

Körper in zwei senkrecht aufeinanderstehenden Hauptkrümmungsebenen liegen (Bild 1), lautet dessen Bestimmungsgleichung

$$\cos \tau = \frac{\frac{1}{r_{11}} - \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{21}} - \frac{1}{r_{22}}}{\frac{1}{r_{11}} + \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{21}} + \frac{1}{r_{22}}} \quad (4)$$

Aus den Gln. (1) und (2) ergibt sich, daß das Verhältnis der Ellipsenhalbachsen

$$g = \frac{s}{l} \quad (5)$$

und damit die Gestalt der Kontaktellipse nur von der Geometrie der Kontaktkörper abhängt. Üblicherweise wird die in Rollrichtung ( $x$ -Richtung) liegende Ellipsenhalbachse mit  $a$  und die quer dazu ( $y$ -Richtung) liegende mit  $b$  bezeichnet. Zur Bestimmung von  $a$  und  $b$  muß die folgende Vergleichsrechnung angestellt werden:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r_{11}} + \frac{1}{r_{21}} &\geq \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{22}} \Rightarrow a = s \leq l = b \\ \frac{1}{r_{11}} + \frac{1}{r_{21}} &\leq \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{22}} \Rightarrow b = s \leq l = a \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Die Beziehungen (1) und (2) gelten für den Fall, daß beide Körper den gleichen Elastizitätsmodul  $E$  und die gleiche Querkontraktionszahl  $\nu$  aufweisen. Bestehen die beiden Körper 1 ( $E_1, \nu_1$ ) und 2 ( $E_2, \nu_2$ ) aus unterschiedlichen Werkstoffen, gilt

$$\frac{1 - \nu^2}{E} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right] \quad (7)$$

Die Normalspannungsverteilung  $p(x, y)$  in der Kontaktfläche hat die Form eines Halbellipsoids (Bild 1).

$$p(x, y) = p_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \quad (8)$$

$p_0$  ist die größte Druckspannung im Mittelpunkt der Kontaktellipse.

$$p_0 = \frac{3F_N}{2\pi ab} \quad (9)$$

Die entwickelten Gleichungen hat Hertz auf Paarungen mit achsparallelen Zylindern ( $r_{11} = r_1, r_{21} = r_2, r_{12} = r_{22} = \infty$ ) der Breite  $B$  übertragen. Spannungen und Verformungen sind hier nur noch von der  $x$ -Koordinate abhängig (zweidimensionales Problem). Es entsteht eine rechteckige Kontaktfläche mit den Seiten  $B$  und  $2a$ . Die halbe Abplattungslänge  $a$  erhält man aus

$$a = \sqrt{\frac{8F_N r_e}{\pi B} \frac{1 - \nu^2}{E}} \quad (10)$$

Die Normalspannung  $p(x)$  ist halb elliptisch über der Abplattungslänge  $a$  verteilt.

$$p(x) = p_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \quad (11)$$

Die größte Druckspannung  $p_0$  herrscht in der Mitte der Abplattungslänge  $a$ .

$$p_0 = \frac{2F_N}{\pi a B} \quad (12)$$

Die Gln. (10) bis (12) gelten dann, wenn ein ebener Formänderungszustand vorausgesetzt wird ( $2a \ll B$ ). Bei „schmalen“ Zylindern ( $2a \gg B$ ) dagegen herrscht ein ebener Spannungszustand. Die dafür zuständigen Beziehungen gehen aus denen des ebenen Formänderungszustands dadurch hervor, daß  $\nu^2 = 0$  gesetzt wird.

Wie in [6] und [7] gezeigt wird, gelten die Hertzsche Gleichungen auch unter Annahme einer über die gesamte Kontaktfläche konstanten Reibungszahl, wenn die Kontaktkörper aus gleichem Werkstoff ( $E_1 = E_2$  und  $\nu_1 = \nu_2$ ) oder aus inkompressiblem Material ( $\nu_1 = \nu_2 = 0,5$ ) bestehen oder wenn einer der Körper aus inkompressiblem Material besteht und der andere als starr angesehen werden kann (z. B.  $\nu_1 = 0,5$  und  $E_2 \gg E_1$ ). Die letzten beiden Fälle treffen für den ebenen Spannungszustand nicht exakt zu.

Wenn Trägheitseffekte in den beiden Halbräumen vernachlässigt werden, was nach [8] für den Kontaktfall Stahl/Stahl bei Eisenbahnradern bis zu einer Geschwindigkeit von 500 km/h zulässig ist, sind die Hertzschen Gleichungen auch bei rollendem Kontakt für die erwähnten Materialkombinationen gültig.

### 2.2 Theorie von Bufler

Das zweidimensionale Problem der Kraftübertragung zwischen zwei aufeinander abrollenden, achsparallelen Walzen aus unterschiedlichen elastischen Werkstoffen hat Bufler [6, 7] behandelt. Er setzt voraus, daß der Rollvorgang stationär verläuft, wobei Zylinder 1 als treibend und Zylinder 2 als getrieben betrachtet wird. Für den Haft- und Gleitbereich der Kontaktfläche gilt  $\mu = \text{konstant}$ . Normal- und Tangentialspannungen beeinflussen hier einander, so daß keine allgemeine analytische Lösung möglich ist.

Eine geschlossene Lösung existiert für den Grenzfall, bei dem in der ganzen Kontaktfläche Haften angenommen wird ( $\mu = \infty$ ) und keine resultierende Tangentialkraft  $F_T$  übertragen wird. Die halbe Abplattungslänge  $a_{VH}$  der Kontaktfläche (VH steht für vollständiges Haften) ergibt sich dann zu

$$a_{VH} = \sqrt{\frac{2F_N}{B(1 + 4K_3^2)K_1}} \quad (13)$$

mit

$$K_1 = \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \frac{E_1 E_2}{E_1(1 - \nu_1^2) + E_2(1 - \nu_2^2)}, \quad (14)$$

$$K_2 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{E_2(1 - \nu_1 - 2\nu_1^2) - E_1(1 - \nu_2 - 2\nu_2^2)}{E_1(1 - \nu_2^2) + E_2(1 - \nu_1^2)}, \quad (15)$$

$$K_3 = \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{\pi + K_2}{\pi - K_2} \right). \quad (16)$$

Die Normalspannungsverteilung  $p_{VH}(x)$  über der Abplattungslänge  $a_{VH}$  ist symmetrisch, die Tangentialspannungsverteilung  $q_{VH}(x)$  asymmetrisch bezüglich der Verbindungslinie der Walzenmittelpunkte.

$$p_{VH}(x) = \frac{K_1 a_{VH}}{\sqrt{\pi^2 - K_2^2}} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a_{VH}}\right)^2} \cos \left[ K_3 \ln \left( \frac{1 + \frac{x}{a_{VH}}}{1 - \frac{x}{a_{VH}}} \right) \right], \quad (17)$$

$$q_{VH}(x) = \frac{K_1 a_{VH}}{\sqrt{\pi^2 - K_2^2}} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a_{VH}}\right)^2} \sin \left[ K_3 \ln \left( \frac{1 + \frac{x}{a_{VH}}}{1 - \frac{x}{a_{VH}}} \right) \right]. \quad (18)$$

Bild 2 zeigt, daß der Einfluß der Reibung eine Erhöhung des Druckmaximums und eine Verkleinerung der Abplattungslänge bewirkt. In Wirklichkeit werden bei endlich großer Reibungszahl an den Rändern der Kontaktfläche Gleitgebiete auftreten, deren Ausdehnung sich auf analytischem Weg nicht ermitteln läßt.

Bestehen beide Walzen aus gleichem Werkstoff, so sind nach Gl. (15) und Gl. (16)  $K_2 = K_3 = 0$ . Die geometrischen Größen der Kontaktfläche und die Druckverteilung entsprechen dann den Hertzschen Gleichungen (10) bis (12).  $K_2$  und  $K_3$  werden auch dann Null, wenn beide Zylinder inkompressibel sind ( $\nu_1 = \nu_2 = 0,5$ ) oder wenn ein Körper inkompressibel ist und der andere als starr angesehen werden kann (z. B.  $\nu_1 = 0,5$  und  $E_2 \gg E_1$ ). Wenn  $K_2 = K_3 = 0$ , ist die Kontaktfläche schubspannungsfrei.

Die Gln. (13) bis (18) gelten auch für den ebenen Spannungszustand, wenn  $\nu_1^2 = \nu_2^2 = 0$  gesetzt wird. Die Hertzschen Gleichungen (10) bis (12) lassen sich daraus allerdings nur für den Fall gleicher Kontaktwerkstoffe herleiten.

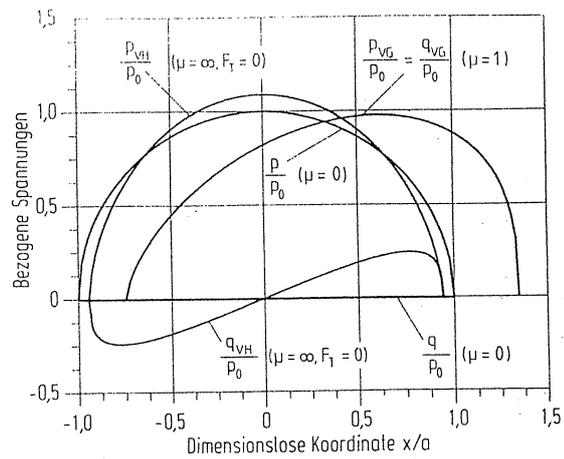


Bild 2. Vergleich der nach Bufler berechneten Normal- und Tangentialspannungen über der Abplattungslänge für die Sonderfälle vollständiges Haften (VH) und vollständiges Gleiten (VG) in der Kontaktfläche mit der Hertzschen Lösung ( $\mu = 0$ ) in dimensionsloser Darstellung für das Beispiel  $r_1 = 100$  mm,  $r_2 = 400$  mm,  $B = 30$  mm,  $E_1 = 70$  N/mm<sup>2</sup>,  $E_2 = 210000$  N/mm<sup>2</sup>,  $\nu_1 = \nu_2 = 0$ ,  $F_N = 5000$  N

Eine weitere geschlossene Lösung des gekoppelten Kontaktproblems gibt Bufler für den Grenzfall des vollkommenen Gleitens in der Kontaktfläche an. Die halbe Abplattungslänge  $a_{VG}$  (VG steht für vollkommenes Gleiten) errechnet sich zu

$$a_{VG} = \sqrt{\frac{F_N}{2BK_4(1 - K_4)K_1}} \quad (19)$$

mit

$$\tan(\pi K_4) = \frac{\pi}{K_2 \mu} \quad \text{für } 0 \leq K_4 \leq 1 \quad (20)$$

Die Mitte der Abplattungslänge liegt hier nicht mehr auf der Verbindungslinie der Walzenmittelpunkte. Ihre Auswanderung  $x_0$  bestimmt sich zu

$$x_0 = a_{VG}(1 - 2K_4). \quad (21)$$

Zusätzlich ist die Druckverteilung  $p_{VG}(x)$  jetzt asymmetrisch bezüglich der Mitte der Abplattungslänge (Bild 2).

$$p_{VG}(x) = \frac{K_1 a_{VG}}{\sqrt{\pi^2 + K_2^2 \mu^2}} \left( \frac{1 - \frac{x}{a_{VG}}}{1 + \frac{x}{a_{VG}}} \right)^{K_4} \left( 1 + \frac{x}{a_{VG}} \right) \quad (22)$$

Die Schubverteilung  $q_{VG}(x)$  ergibt sich gemäß dem Coulombschen Reibungsgesetz durch Multiplikation der Druckverteilung mit der Reibungszahl  $\mu$ .

Bei Walzen aus gleichen Werkstoffen oder wenn beide Körper inkompressibel sind ( $\nu_1 = \nu_2 = 0$ ) oder ein Körper inkompressibel und der andere starr ist (z. B.  $\nu_1 = 0,5$  und  $E_2 \gg E_1$ ), wird  $K_2 = 0$  und infolgedessen  $K_4 = 1/2$ . Damit folgen aus Gl. (19) und Gl. (22) wiederum die Hertzschen Gleichungen. Bei allen anderen Werkstoffkombinationen folgen die Hertzschen Gleichungen nur für den reibungsfreien Zustand in der Kontaktfläche ( $\mu = 0$ ).

Bzüglich des ebenen Spannungszustands gelten für den Gleitfall die gleichen Aussagen wie für den Haftfall.

### 3 Bekannte analytische Arbeiten zum Tangentialkontakt

#### 3.1 Theorie von Carter und Fromm

Die analytische Bestimmung der Tangentialspannung über die Abplattungslänge für den allgemeinen Fall des rollenden Kontakts ist nur bei gleichen Kontaktmaterialien möglich, denn dann können das Normal- und das Tangentialkontaktproblem getrennt voneinander behandelt werden. Die Lösung dieses Tangentialkontaktproblems gelang Carter (1926) [9] und Fromm (1927) [10]. Später behandelten Föppl [11], Heinrich [12], Poritsky [13] und Bufler [6, 7] das gleiche Problem. Sie geben ein Berechnungsverfahren an, das die Bestimmung der Tangentialspannungsverteilung bzw. der Tangentialkraft in der Berührzone von zwei mit Tangential-schlupf aufeinander abrollenden Zylindern ermöglicht. Dabei wird vorausgesetzt, daß der Rollvorgang stationär verläuft und im Kontaktgebiet das Coulombsche Reibungsgesetz gilt. Die Normalspannungsverteilung wird nach Hertz bestimmt.

Die analytische Lösung zeigt, daß sich die Kontaktfläche in eine Haftzone am einlaufenden Rand und in eine Gleitzone am auslaufenden Rand aufteilt. Im Haftgebiet läßt sich die Verteilung der Tangentialspannung als Differenz zweier Halbkreise 1 und 2 (Bilder 3a und b) darstellen [6, 7], im Gleitgebiet durch Multiplikation der Normalspannung mit der Reibungszahl. Bei sehr kleinem Schlupf überwiegt der Haftbereich. Wenn der Grenzschlupf  $s_{10}$  erreicht wird, tritt vollständiges Gleiten in der Kontaktfläche auf. Die Tangentialkraft erreicht dann ihren größten Wert.

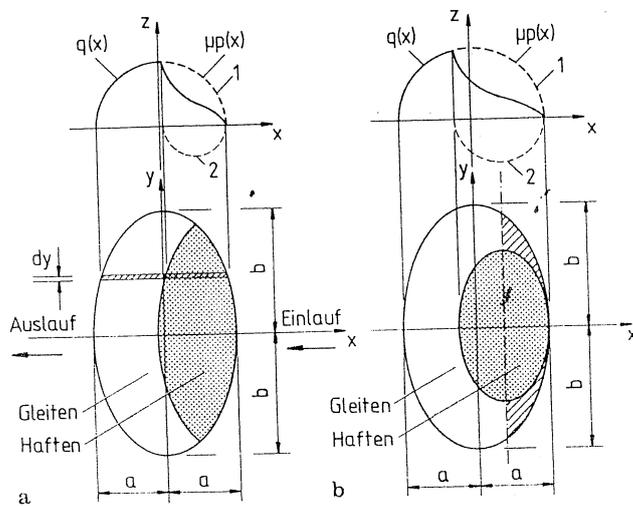


Bild 3a und b. Tangentialspannungsverteilung nach Carter und Fromm sowie Haft- und Gleitgebiete in der elliptischen Kontaktfläche nach a Haines und Ollerton und b Vermeulen und Johnson

Durch Normieren auf  $s_{10}$  entsteht eine allgemeingültige, von den Systemeigenschaften unabhängige Kraftschluß-Schlupf-Beziehung, die dann von Vorteil ist, wenn unter verschiedenen Bedingungen gewonnene Versuchsergebnisse miteinander verglichen werden sollen. Die Beziehung zwischen normiertem Tangentialkraftschluß  $f_t/\mu$  und normiertem Tangentialschlupf  $s_t/s_{10}$  lautet nach Carter und Fromm (Bild 4)

$$\frac{f_t}{\mu} = 1 - \left(1 - \frac{s_t}{s_{10}}\right)^2 \quad \text{für} \quad \frac{s_t}{s_{10}} \leq 1 \quad (23)$$

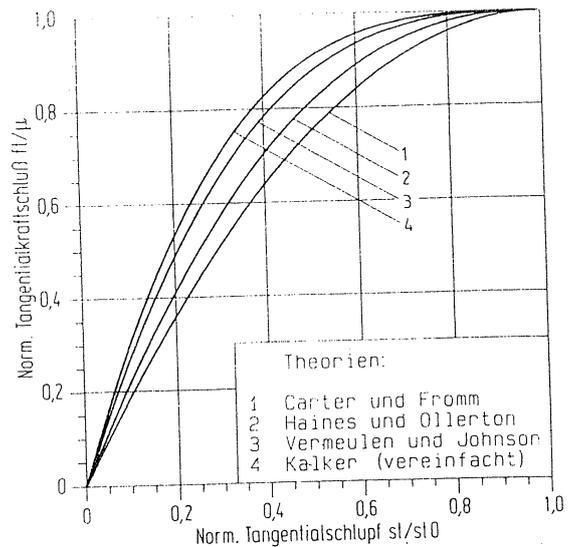


Bild 4. Normierte Kraftschluß-Schlupf-Gesetze für rechteckige und elliptische Kontaktflächen

mit dem Tangentialkraftschluß

$$f_t = \frac{F_T}{F_N} \quad (24)$$

dem Tangentialschlupf

$$s_t = \frac{v_1 - v_2}{v_1} \cdot 1000\% \quad (25)$$

und dem Grenzschlupf

$$s_{10} = \mu \sqrt{\frac{8F_N}{\pi B r_c} \cdot \frac{1 - \nu^2}{E}} = \mu \frac{a}{r_c} \quad (26)$$

Hier bedeuten  $F_T$  die in der Kontaktfläche in Rollrichtung übertragene Tangentialkraft,  $v_1$  und  $v_2$  die Umfangsgeschwindigkeiten vom treibenden Rad und dem getriebenen Gegenrad im unverformten Zustand. Bei Rädern, die auf einer geraden Fahrbahn rollen, ist für  $v_2$  die Mittelpunktschwindigkeit des Rades zu setzen. Der Radius  $r_{21}$  geht dann gegen unendlich.

Das Kraftschluß-Schlupf-Gesetz gilt in vorliegender Form für den ebenen Formänderungszustand. Obwohl Gl. (26) nur für gleiche Kontaktmaterialien gültig ist, läßt sich unter Berücksichtigung von Gl. (7) eine Näherungslösung für unterschiedliche Kontaktmaterialien angeben. Der Übergang zum ebenen Spannungszustand geschieht gemäß Abschnitt 2.1 durch Setzen von  $\nu^2 = 0$ .

#### 3.2 Theorie von Haines und Ollerton

Eine Anwendung der zweidimensionalen Theorie von Carter und Fromm auf das dreidimensionale Problem, das beim Abrollen von beidseitig gekrümmten Körpern entsteht, stellt die sogenannte Streifentheorie von Haines und Ollerton [14] dar. Die elliptische Kontaktfläche wird in zur Rollrichtung parallel verlaufende Streifen  $dy$  unterteilt. Auf jeden Streifen wird die zweidimensionale Theorie von Carter und Fromm angewendet. Eine mögliche gegenseitige Beeinflussung der Streifen wird vernachlässigt. Die Kontaktflächenhalbachsen werden nach der Theorie von Hertz bestimmt.

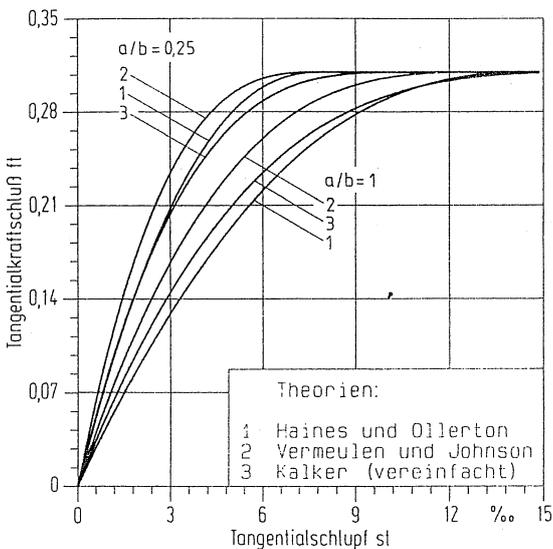
Die Form des Haftgebiets ergibt sich als Schnittfläche zweier einander schneidender Ellipsen (Bild 3a). Der einlaufende Rand der Kontaktfläche deckt sich mit dem Rand des Haftgebiets. Die hintere Begrenzung des Haftgebiets entsteht durch Parallelverschiebung des auslaufenden Randes. In Versuchen mit Gummirollkörpern auf einer Glasplatte machen Haines und Ollerton das Haft- und Gleitgebiet sichtbar und zeigen, daß die Abgrenzung beider Zonen von der Streifentheorie prinzipiell richtig wiedergegeben wird.

Die Streifentheorie liefert besonders dann gute Ergebnisse, wenn die Kontaktellipse schmal in Rollrichtung ist ( $a, b < 1/2$ ). Mit zunehmendem Verhältnis  $a/b$  entstehen Abweichungen zum wirklichen Verlauf der Kraftschluß-Schlupf-Kurve, vor allem bei mittleren Kraftschlußwerten [18]. Das normierte Kraftschluß-Schlupf-Gesetz nach Haines und Ollerton lautet (Bilder 4 und 5)

$$\frac{f_t}{\mu} = \frac{3}{2} \cdot \frac{s_t}{s_{t0}} \arcsin \sqrt{1 - \left(\frac{s_t}{s_{t0}}\right)^2} - \frac{3}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{s_t}{s_{t0}}\right)^2} + \frac{1}{2} \left[ 1 - \left(\frac{s_t}{s_{t0}}\right)^2 \right]^{3/2} + 1 \quad \text{für} \quad \frac{s_t}{s_{t0}} \leq 1 \quad (27)$$

mit

$$s_{t0} = \mu \frac{6F_N}{\pi ab} \cdot \frac{1 - \nu^2}{E} = \mu \frac{1}{\pi \frac{a}{b} l^{*2}} \sqrt{\frac{24F_N}{r_c^2} \cdot \frac{1 - \nu^2}{E}} \quad (28)$$



**Bild 5.** Vergleich der Kraftschluß-Schlupf-Gesetze für elliptische Kontaktflächen mit  $a/b = 0,25$  und  $a/b = 1$  für das Beispiel  $E_1 = 3200 \text{ N/mm}^2$ ,  $E_2 = 210000 \text{ N/mm}^2$ ,  $\nu_1 = 0,35$ ,  $\nu_2 = 0,3$ ,  $F_N = 1000 \text{ N}$ ,  $\mu = 0,31$

Der maßgebende Hertzsche Hilfswert  $h^*$  ist entsprechend der Größe des Verhältnisses der Kontaktellipsenhalbachsen zu wählen.

$$h^* = \begin{cases} l^* & \text{für } a \leq b, \\ s^* & \text{für } a \geq b. \end{cases}$$

### 3.3 Theorie von Vermeulen und Johnson

Aufbauend auf Carter und Fromm, formulierte Johnson 1958 die erste dreidimensionale Theorie des rollenden Kontakts

für kreisförmige Kontaktflächen und Wälzen mit Tangential-schlupf oder Axialschlupf [15] oder mit sehr kleinem Bohrschlupf [16]. Spannungen und Verformungen sind jetzt auch von der quer zur Rollrichtung liegenden Koordinate  $y$  abhängig. Axialschlupf entsteht, wenn die Bewegungsrichtung eines zwangsgeführten Rades nicht mit der Rollrichtung übereinstimmt. Bohrschlupf (Spin) tritt auf, wenn die Vektoren der Winkelgeschwindigkeiten der beiden aufeinander abrollenden Körper nicht parallel zur Kontaktfläche liegen. Dies ist der Fall beim Laufen unter einem Sturzwinkel und bei kegeligen Rädern.

Im Jahre 1964 erweiterten Vermeulen und Johnson [17] das Verfahren auf Tangential- oder Axialschlupf bei elliptischen Kontaktflächen mit beliebigem Halbachsenverhältnis. Grundlage des Verfahrens ist die Annahme, daß das Haftgebiet innerhalb der Kontaktfläche die gleiche Form (gleiches  $a/b$ ) wie die Kontaktfläche selbst hat und daß das Haftgebiet den Einlaufpunkt auf der  $x$ -Achse tangiert (Bild 3b). Wie Kalker [18] später nachwies, ist diese Annahme jedoch unzutreffend, denn im schraffierten Gebiet stimmt die örtliche Gleitrichtung nicht mit der Richtung der dort auftretenden Tangentialspannung überein.

Die Kontaktflächenhalbachsen und die Normalspannungsverteilung werden wiederum nach Hertz ermittelt. Die Beziehungen nach Vermeulen und Johnson lauten für reinen Tangentialschlupf (Bilder 4 und 5)

$$\frac{f_t}{\mu} = 1 - \left(1 - \frac{s_t}{s_{t0}}\right)^3 \quad \text{für} \quad \frac{s_t}{s_{t0}} \leq 1 \quad (29)$$

mit

$$s_{t0} = \frac{3\mu F_N [B^* - \nu(D^* - C^*)]}{\pi G a b} = \mu \frac{B^* - \nu(D^* - C^*)}{\pi \frac{a}{b} l^{*2}} \sqrt[3]{\frac{12F_N}{r_c^2 G (1 - \nu)^2}} \quad \text{für } a < b, \quad (30)$$

$$s_{t0} = \frac{3\mu F_N (4 - 3\nu)}{16 G a b} = \mu \frac{4 - 3\nu}{16} \sqrt[3]{\frac{12F_N}{r_c^2 G (1 - \nu)^2}} \quad \text{für } a = b, \quad (31)$$

$$s_{t0} = \frac{3\mu F_N [D^* - \nu(D^* - C^*)]}{\pi G a^2} = \mu \frac{D^* - \nu(D^* - C^*)}{\pi \frac{a}{b} s^{*2}} \sqrt[3]{\frac{12F_N}{r_c^2 G (1 - \nu)^2}} \quad \text{für } a > b. \quad (32)$$

Die Gleichungen gelten für Wälzkörper aus gleichem Material, das durch den Schubmodul  $G$  und die Querkontraktionszahl  $\nu$  charakterisiert ist. Um eine Näherungslösung für verschiedene Kontaktwerkstoffe zu erhalten, kann aus den elastischen Konstanten des Rades ( $E_1, \nu_1$ ) und des Gegenrades ( $E_2, \nu_2$ ) analog Gl. (7) ein kombiniertes  $G$  und  $\nu$  bestimmt werden.

$$G_1 = \frac{E_1}{2(1 + \nu_1)}, \quad G_2 = \frac{E_2}{2(1 + \nu_2)}; \quad (33)$$

$$G = \frac{2G_1 G_2}{G_1 + G_2}, \quad \nu = \frac{G}{2} \left[ \frac{\nu_1}{G_1} + \frac{\nu_2}{G_2} \right] \quad (34)$$

Die vollständigen elliptischen Integrale

$$\left. \begin{aligned} B^* &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \varphi \, d\varphi}{|1 - e^2 \sin^2 \varphi|} \\ C^* &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi}{(|1 - e^2 \sin^2 \varphi|)^3} \\ D^* &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \varphi \, d\varphi}{|1 - e^2 \sin^2 \varphi|} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

sind Funktionen der Variablen  $e$ .

$$e = \sqrt{1 - g^2} \quad (36)$$

Diese wird auch als Exzentrizität bezeichnet. Die Werte der Integrale sind z. B. in [19] tabelliert (Tabelle 1).

### 3.4 Vereinfachte nichtlineare Theorie von Kalker

1967 entwickelte Kalker [18] auf der Grundlage des Halbraummodells die sogenannte exakte nichtlineare Theorie für Wälzen mit beliebigem Tangential-, Axial- und Bohrschlupf bei elliptischen Kontaktflächen. Dabei handelt es sich um ein numerisches Rechenverfahren, das in Form verschiedener Rechenprogramme existiert [18, 20, 21].

Gleichzeitig behandelt Kalker auch den Fall, bei dem Gleiten nur in einer äußerst schmalen Randzone der Kontaktfläche auftritt und daher vernachlässigt werden kann. Es ergibt sich ein linearer Zusammenhang zwischen Kraft- und Schlupfgrößen (exakte lineare Theorie). Die Proportionalitätskoeffizienten  $C_{ik}$  sind in Abhängigkeit des Halbachsenverhältnisses  $a/b$  der Kontaktellipse und der Querkontraktionszahl  $\nu$  der aus gleichem Material bestehenden Kontaktkörper berechnet. Sie sind inzwischen unter dem Namen „Kalker-Koeffizienten“ bekannt (Tabelle 2).

Tabelle 2. Kalker-Koeffizient  $C_{11}$  in Abhängigkeit des Halbachsenverhältnisses  $g$  der Kontaktellipse und der Querkontraktionszahl  $\nu$

Halbachsenverhältnis $g = s/l$	Kalker-Koeffizient $C_{11}$			
	$\nu = 0$	1/4	1/2	
	$\pi^2/\{4(1-\nu)\}$			
$b > a$	0,1	2,51	3,31	4,85
	0,2	2,59	3,37	4,81
	0,3	2,68	3,44	4,80
	0,4	2,78	3,53	4,82
	0,5	2,88	3,62	4,83
	0,6	2,98	3,72	4,91
	0,7	3,09	3,81	4,97
	0,8	3,19	3,91	5,05
	0,9	3,29	4,01	5,12
	1,0	3,40	4,12	5,20
$a > b$	0,9	3,51	4,22	5,30
	0,8	3,65	4,36	5,42
	0,7	3,82	4,54	5,58
	0,6	4,06	4,78	5,80
	0,5	4,37	5,10	6,11
	0,4	4,84	5,57	6,57
	0,3	5,57	6,34	7,34
	0,2	6,96	7,78	8,82
	0,1	10,7	11,7	12,9
	0	$\frac{2\pi}{g \ln(16/g^2) - 2\nu g} \left\{ 1 + \frac{3 - \ln 4}{\ln(16/g^2) - 2\nu} \right\}$		

Unter dem Aspekt der Rechenzeitverkürzung entwickelte Kalker [22] die sogenannte vereinfachte nichtlineare Theorie des rollenden Kontakts. Dabei handelt es sich ebenfalls um ein numerisches Verfahren zur Behandlung von Wälzproblemen bei Tangential-, Axial- und Bohrschlupf bei elliptischen Kontaktflächen.

Die Theorie geht von der Modellvorstellung aus, daß die Kontaktkörper aus einem starren Grundkörper bestehen, auf dem infinitesimal dicht sitzende elastische Borsten aufgebracht sind. Aus mechanischer Sicht handelt es sich bei diesem Modell um eine Winklersche Bettung. Die konstitutiven Gleichungen des Halbraums von Boussinesq und Cerrutti [18] werden durch proportionale Beziehungen zwischen Tangentialverschiebung und Schubspannung ersetzt. Das Modell der Winklerschen Bettung ist nur für den Fall gleicher Kontaktmaterialien sinnvoll. Näherungslösungen für ungleiche Kontaktwerkstoffe lassen sich unter Berücksichtigung von Gl. (33) und Gl. (34) finden.

Die Halbachsen der elliptischen Kontaktfläche werden nach Hertz bestimmt. Die Normalspannungsverteilung  $p_{WB}(x)$  hat bei der Winklerschen Bettung in Abweichung zu Hertz die Form eines Halbparaboloids.

$$p_{WB}(x, y) = \frac{2F_N}{\pi ab} \left[ 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 \right] \quad (37)$$

Die noch unbekanntenen Proportionalitätskonstanten zwischen Tangentialverschiebungen und Schubspannungen werden so bestimmt, daß bei infinitesimal kleinem Schlupf und Spin die Ergebnisse aus der exakten linearen und aus der vereinfachten nichtlinearen Theorie übereinstimmen. Damit wird über die in der linearen Theorie bestimmten Kalker-Koeffizienten eine Verbindung zu den Proportionalitätskonstanten hergestellt.

Die Halbachsen der elliptischen Kontaktfläche werden nach Hertz bestimmt. Die Normalspannungsverteilung  $p_{WB}(x)$  hat bei der Winklerschen Bettung in Abweichung zu Hertz fest läßt sich bei der vereinfachten nichtlinearen Theorie eine analytische Lösung angeben (Bilder 4 und 5).

$$\frac{f_t}{\mu} = \frac{2}{3\pi} \left[ 3 \arcsin \frac{s_t}{s_{t0}} - 12 \left(\frac{s_t}{s_{t0}}\right)^2 \arccos \frac{s_t}{s_{t0}} + \left\{ 13 \frac{s_t}{s_{t0}} + 2 \left(\frac{s_t}{s_{t0}}\right)^3 \right\} \sqrt{1 - \left(\frac{s_t}{s_{t0}}\right)^2} \right] \quad \text{für } \frac{s_t}{s_{t0}} \leq 1 \quad (38)$$

mit

$$s_{t0} = \frac{\mu 32 F_N}{3\pi ab C_{11} G} = \frac{\mu 32}{3\pi \frac{a}{b} C_{11} h^{*2}} \sqrt[3]{\frac{4F_N}{9r_c^2 G(1-\nu)^2}} \quad (39)$$

und mit dem maßgebenden Hertzischen Hilfswert

$$h^* = \begin{cases} l^* & \text{für } a \leq b, \\ s^* & \text{für } a \geq b. \end{cases}$$

Im zweiten Teil des Beitrags werden die vorgestellten Theorien auf den Kontaktfall Kunststoff/Stahl übertragen. Die danach errechneten Kraftschluß-Schlupf-Kurven werden mit den experimentellen Ergebnissen verglichen.

### Literatur

- Severin, D.; Lütkebohle, H.: Rollreibung zylindrischer Lauf­räder aus Kunststoff. Konstruktion 37 (1985) H. 5, S. 177–184
- Severin, D.; Lütkebohle, H.: Wälzreibung zylindrischer Räder aus Kunststoff. Konstruktion 38 (1986) H. 5, S. 173–179

3. Hertz, H.: Über die Berührung fester elastischer Körper. J. reine u. angew. Math. 92 (1881) S. 156-171
4. Mundt, R.: Über die Berührung fester elastischer Körper -- Eine allgemeinverständliche Darstellung der Theorie von Heinrich Hertz. SKF -- Vereinigte Kugellagerfabriken AG, Schweinfurt 1950
5. Eschmann, Hasbargen, Weigand: Die Wälzlagerpraxis. 2. Aufl. München: Oldenbourg 1978
6. Bufler, H.: Zur Theorie der rollenden Reibung. Ing.-Arch. 27 (1959) H. 3, S. 137-152
7. Bufler, H.: Beanspruchung und Schlupf beim Rollen elastischer Walzen. Forsch. auf d. Geb. d. Ing.wes. 27 (1961) H. 4, S. 121-126
8. Kalker, J. J.: Survey of wheel-rail rolling contact theory. Vehicle System Dynamics 8 (1979) pp. 317-358
9. Carter, F. W.: On the action of a locomotive driving wheel. Proc. Royal Soc. A 112 (1926) pp. 151-157
10. Fromm, H.: Berechnung des Schlupfes beim Rollen deformierbarer Scheiben. Z. f. angew. Math. u. Mech. 7 (1927) H. 1, S. 27-58
11. Föppl, L.: Die strenge Lösung für die rollende Reibung. München: Leibniz 1947
12. Heinrich, G.: Zu L. Föppls Theorie der rollenden Reibung. Österr. Ing.-Arch. 4 (1950) H. 5, S. 363-375
13. Poritsky, H.: Stresses and deflections of cylindrical bodies in contact with application to contact of gears and of locomotive driving wheels. Trans. ASME, J. Appl. Mech. 72 (1950) No. 6, pp. 191-201
14. Haines, D. J.; Ollerton, E.: Contact stress distributions on elliptical contact surfaces subjected to radial and tangential forces. Proc. Instn. Mech. Engrs. 177 (1963) No. 4, pp. 95-114
15. Johnson, K. L.: The effect of a tangential contact force upon the rolling motion of an elastic sphere on a plane. J. Appl. Mech. 25 (1958) No. 9, pp. 339-346
16. Johnson, K. L.: The effect of spin upon the rolling motion of an elastic sphere on a plane. J. Appl. Mech. 25 (1958) No. 9, pp. 332-338
17. Vermeulen, P. J.; Johnson, K. L.: Contact of nonspherical bodies transmitting tangential forces. J. Appl. Mech. 31 (1964) No. 6, pp. 338-340
18. Kalker, J. J.: On the rolling contact of two elastic bodies in the presence of dry friction. Diss. TH Delft 1967
19. Jahnke, E.; Emde, F.: Tables of functions. New York: Dover Publications 1945
20. Kalker, J. J.: The computation of three-dimensional rolling contact with dry friction. Int. J. Num. Meth. Eng. 14 (1979) pp. 1293-1307
21. Kalker, J. J.: Introduction to the Fortran IV programs DUVOROL and CONTACT for the solution of three-dimensional elastostatic half-space contact problems with and without friction. Report Dept. Math. a. Inf. No. 82-29, TH Delft 1982
22. Kalker, J. J.: Simplified theory of rolling contact. Delft Progress Report 1 (1973) pp. 1-10
23. Lütkebohle, H.: Roll- und Wälzreibung zylindrischer Räder aus thermoplastischen Kunststoffen. Diss. TU Berlin 1984
24. Kraft, G.: Das Phänomen des elastischen Schlupfes und dessen Einfluß auf das Verhalten von drehzahlgekoppelten Laufrollern. Diss. Univ. Bochum 1980
25. Poll, G.: Der Einfluß der realen Systemeigenschaften auf die Kraftschlußgesetze bei wälzender Relativbewegung. Diss. RWTH Aachen 1983

## Buchbesprechungen

Steinhilper, W.; Röper, R.: **Maschinen- und Konstruktionselemente. Bd. 1: Grundlagen der Berechnung und Gestaltung.** 2. Aufl. Berlin: Springer 1988. 398 S., 222 Abb., 39 Tab. Brosch. DM 68,-

Vor Erscheinen des dritten Hochschulbest-Bandes des Gesamtwerks wurde schon die zweite Auflage des ersten Bandes von 1982 erforderlich. Die Verfasser haben notwendige Berichtigungen vorgenommen und ein Berechnungsbeispiel überarbeitet. Die für Studierende hilfreiche Aktualisierung der Begleitliteratur und eine Ergänzung wichtiger Bilder und Tabellen mit Quellenhinweisen sind leider unterblieben.

Das erste Kapitel ist eine kurze Einführung in die Konstruktion, wobei Grundkenntnisse über die Gestalt und die Funktion von Maschinenelementen erwartet werden. Das zweite Kapitel erläutert kompakt Normzahlen, Toleranzen, Passungen und Oberflächen. Ein Drittel des Buches ist (im dritten Kapitel) den Grundlagen der allgemeinen Festigkeitsberechnung und der Gestaltfestigkeitsberechnung von Bauteilen gewidmet. Hier werden die Berechnungen bei zusammengesetzten Beanspruchungen, die Festigkeitshypothesen, die Werkstoffkennwerte bei statischen und schwingenden Beanspruchungen sowie die Kerbwirkung ausführlich und mit Berechnungsbeispielen gut dargestellt.

Im letzten Drittel des Buches wird die Gestaltung zunächst unter den Aspekten der Eindeutigkeit, Einfachheit, Sicherheit und der guten Materialausnutzung behandelt. Der wesentliche Teil des Kapitels umfaßt die fertigungsorientierte Gestaltung, wobei Verfahren- und Werkzeugkenntnisse aus dem Grundpraktikum erforderlich sind, da manchen Studenten einige Begriffe ohne bildliche Erläuterung unklar bleiben. Einige Bilder zur gießgerechten Gestaltung benötigen Hinweise auf ungünstige bzw. günstige Ausführung. Das Kapitel ist insgesamt mit Abbildungen gut ausgestattet.

Zusammenfassend ist dem Buch eine gute Aufbereitung des Grundlagenwissens zu bestätigen. Es wird seinen mit Gestaltung und Berechnung befaßten Nutzern ein wertvoller Helfer sein.

R. Seefluth

Allesch, J.; Preiß-Allesch, D.; Spengler, U.: **Technologie-Transfer. Bd. 12: Hochschule und Wirtschaft -- Bestandsaufnahme und Modelle der Zusammenarbeit.** Köln: Verlag TÜV Rheinland 1988. 232 S., 20 Abb., 15 Tab. Brosch. DM 58,-

Die Forschungsgruppe „Prowis“ führte im Auftrag des Bundesministeriums für Bildung und Wissenschaft in der Zeit vom November 1983 bis zum Juni 1986 eine umfassende Untersuchung der aktuellen Situation und Einschätzung perspektivischer Entwicklungen von Kooperationsbeziehungen zwischen Hochschule und Wirtschaft durch. Die Ergebnisse dieser Untersuchung sind im Band 12 der Reihe „Technologie-Transfer“ veröffentlicht. Erstmals wird hier eine Analyse der Praxiskontakte von Hochschullehrern geliefert.

Der Untersuchung liegt eine Befragung von 1800 Hochschullehrern aus Wirtschafts-, Ingenieur- und Naturwissenschaften an den wissenschaftlichen Hochschulen der Bundesrepublik Deutschland zugrunde. Die Publikation gibt einen umfassenden Überblick über die 49 Wissens- und Technologietransferinstitutionen an den 67 Universitäten und Gesamthochschulen, deren Leistungsspektrum und Kooperationspartner.

Darüber hinaus werden ausgewählte internationale Modelle des Wissens- und Technologietransfers aus Hochschulen gezeigt, die Anregungen und Impulse für neue Formen der Zusammenarbeit zwischen Hochschule und Wirtschaft geben können. Im Anhang befindet sich eine Liste mit den Veröffentlichungen des Forschungsprojekts „Prowis“ sowie ein ausführliches Literaturverzeichnis.

Das Buch will der Industrie Mut machen, sich die Hochschule als Informationsquelle zu erschließen, und den Hochschulen die Berührungsgänge vor der Industrie nehmen. Sehr

Gross, D.; Hauger, W.; Schnell, W.: **Technische Mechanik. Bd. 1: Statik.** Berlin: Springer 1988. 204 S., 172 Abb. Brosch. DM 29,80

Dieses Buch wurde vorwiegend für Studienanfänger des Bauwesens und der Architektur geschrieben. Hilfreich ist es aber auch